

ÉNONCÉ TD - I1

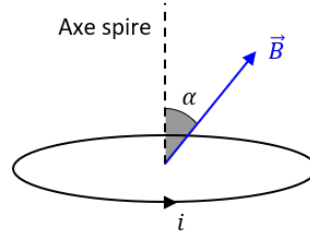
EXERCICES À MAÎTRISER

Ex. n°1 • Spire dans un champ magnétique variable

☆☆☆

2427

On considère une spire circulaire de rayon a , de résistance R , plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-t/\tau}$ incliné d'un angle α par rapport à l'axe de la spire (axe perpendiculaire au plan de la spire et passant par son centre).



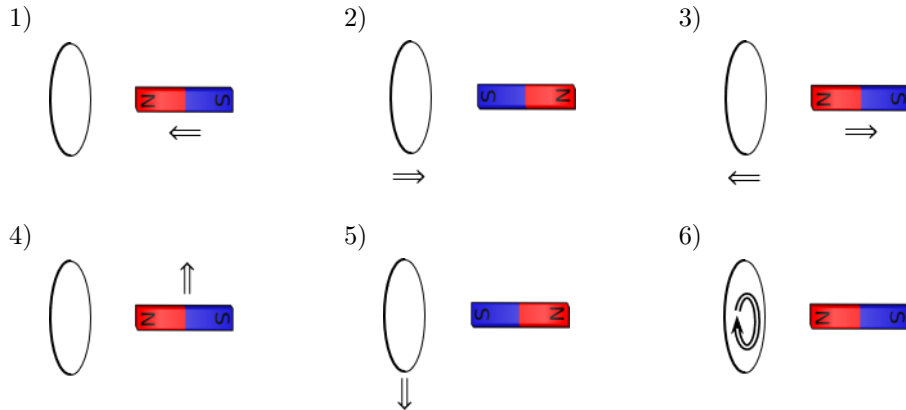
- 1) Exprimer le flux du champ magnétique à travers la spire.
- 2) Exprimer la force électromotrice induite.
- 3) Faire le schéma électrique équivalent exprimer l'intensité $i(t)$ dans la spire.

Ex. n°2 • Signe d'un courant induit

☆☆☆

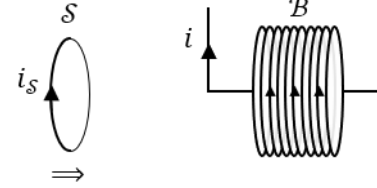
1017

Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant droit sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Indiquer le sens (positif) d'établissement du courant durant le déplacement.

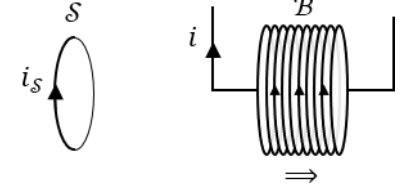


La spire \mathcal{S} est parcourue par un courant d'intensité $i_S > 0$ constant. Dans chacun des circuits ci-dessous, la \mathcal{S} et/ou la bobine \mathcal{B} sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Indiquer le signe du courant i induit dans la bobine \mathcal{B} pendant le déplacement.

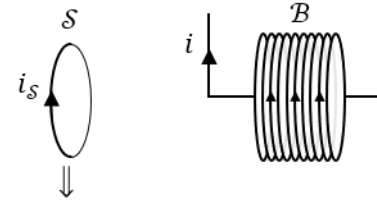
7)



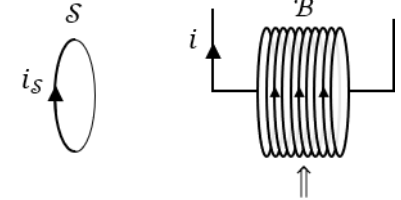
8)



9)



10)



Ex. n°3 • Induction mutuelle entre deux bobines

☆☆☆

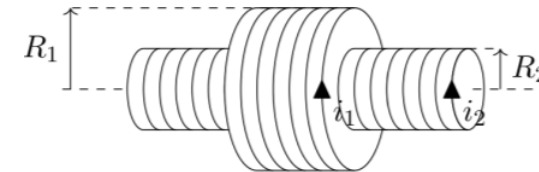
4247

On indique que pour une bobine longue d'axe Δ , le champ magnétique créé à l'intérieur de la bobine est uniforme, colinéaire à Δ , et vaut :

$$B = \frac{\mu_0 N i}{d}$$

avec : N le nombre de spires, i l'intensité traversant la bobine et d la longueur de la bobine. De plus, le champ magnétique est nul à l'extérieur de la bobine.

Considérons deux bobines en influence magnétique, c'est-à-dire qu'une partie des lignes de champ de chaque bobine traverse l'autre bobine. La bobine 2 uniquement peut être considérée comme une bobine longue, et on note \vec{B}_2 le champ qu'elle crée.



On considère dans un premier temps que les bobines ont même rayon : $R_1 = R_2$.

- 1) Déterminer l'expression du flux $\phi_{2 \rightarrow 2s}$ de \vec{B}_2 à travers une spire de la bobine 2, puis le flux $\phi_{2 \rightarrow 2}$ de \vec{B}_2 à travers l'ensemble de la bobine 2.

- 2) En déduire l'inductance propre L_2 de la bobine longue.
- 3) Déterminer l'expression du flux $\phi_{2 \rightarrow 1s}$ de \vec{B}_2 à travers une spire de la bobine 1, puis le flux $\phi_{2 \rightarrow 1}$ de \vec{B}_2 à travers l'ensemble de la bobine 1.
- 4) En déduire le coefficient d'induction mutuelle M .
- 5) Dans le cas de deux bobines de même longueur ($d_1 = d_2$), exprimer M en fonction de L_1 et L_2 .

On considère désormais que les bobines ont des rayons et des longueurs différentes (tel qu'indiqué sur la figure). Seule la bobine 2 est une bobine longue.

- 6) Déterminer le coefficient d'induction mutuelle M .

Ex. n°4 • Inductance mutuelle entre une spire et un fil

☆☆☆

5606

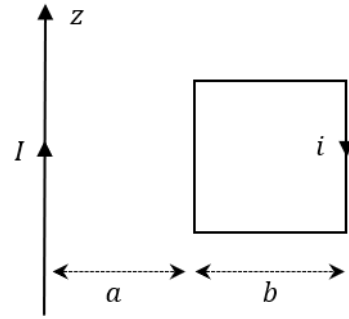
On considère un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I et une spire carrée.

On donne l'expression (en coordonnées cylindriques) du champ magnétique créé par un fil infini d'axe (Oz) .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- 1) Déterminer l'expression du flux $\phi_{f \rightarrow s}$ du champ magnétique développé par le fil à travers la spire.

- 2) En déduire l'expression de l'inductance mutuelle M entre le fil et la spire.

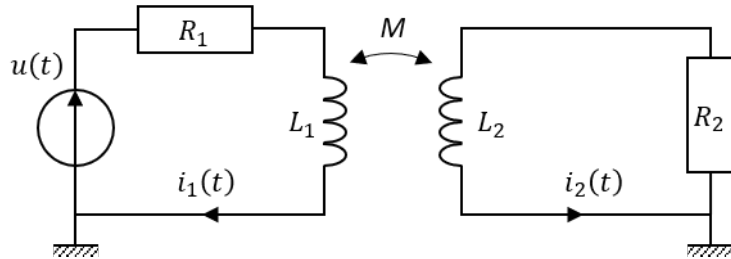


Ex. n°5 • Circuits RL couplés

☆☆☆

5947

On considère deux circuits RL couplés magnétiquement.



- 1) Déterminer les deux équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

On pose :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t)$$

- 2) En régime sinusoïdal forcé, établir l'expression des amplitudes complexes $\underline{I}_1(\omega)$ et $\underline{I}_2(\omega)$.

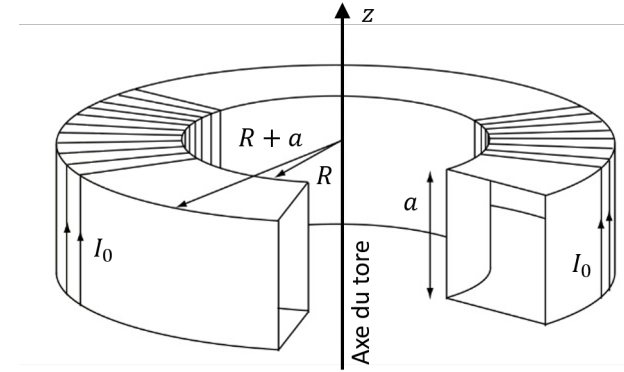
POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°6 • Inductance propre d'une bobine torique

☆☆☆

6569

On considère une bobine torique formée de N spires jointives carrées (où N est très grand) telle que celle-ci :



On admet que le champ magnétique à l'intérieur de la bobine vaut :

$$\vec{B}(M) = -\frac{N\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Le champ est nul à l'extérieur.

Déterminer le flux magnétique à travers une spire, puis le flux total à travers le tore. En déduire l'inductance du tore.

Ex. n°7 • Pince ampèremétrique

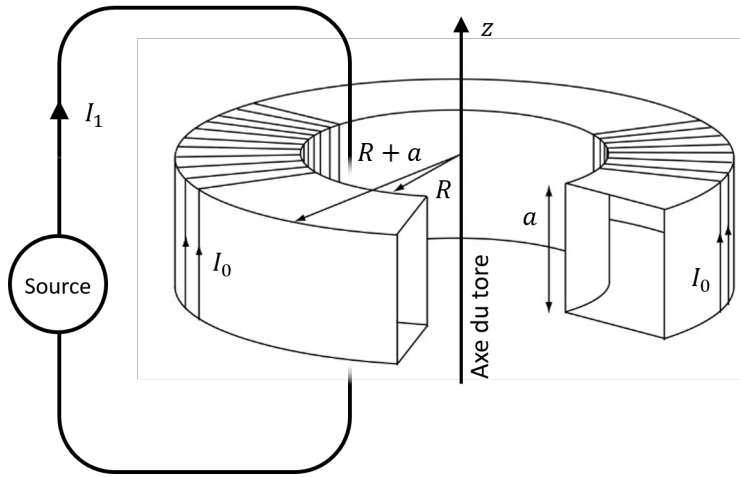
☆☆☆

6281

On considère une bobine torique à base carrée : N spires sont régulièrement bobinées sur un tore de section carrée de côté a , d'axe (Oz) (dirigé vers le haut) et de rayon intérieur R . Cette bobine a une résistance ohmique totale R_b .

Une spire parcourue par un courant $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t)$ enlace le tore. On donne que le champ magnétique est nul à l'extérieur du tore et vaut, à l'intérieur du Tore :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 N i_0}{2\pi r} \quad \text{avec : } \mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$



Remarque : $i_0(t)$ et $i_1(t)$ représentent l'intensité en fonction du temps; I_0 et I_1 représentent les amplitudes.

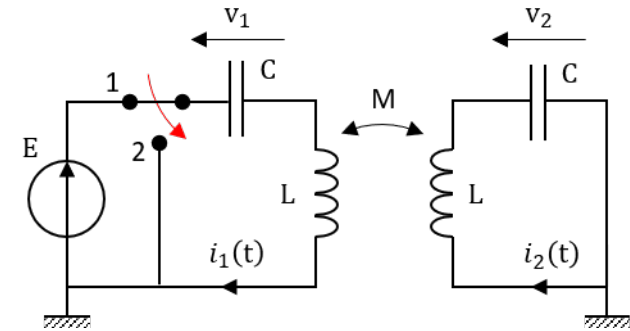
- 1) Exprimer l'inductance L_b de la bobine torique et l'inductance mutuelle M des deux circuits.
- 2) La bobine torique est fermée sur elle-même. Exprimer le courant $i_0(t)$ dans cette bobine, en régime sinusoïdal établi. Simplifier cette expression quand $R_b \ll \omega L_b$. Quelle application pratique y voyez-vous ?

Ex. n°8 • Circuits LC couplés

★★★ 3606

On considère le circuit suivant, où deux oscillateurs LC identiques sont couplés par inductance mutuelle M (on admet que $0 < M < L$). On note v_1 et v_2 les tensions aux bornes des condensateurs (en convention récepteur). On note : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre des oscillateurs.

En $t = 0^-$, le système a atteint un régime stationnaire. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur dans la position 2.



Formulaire :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

- 1) Établir, pour $t > 0$, un système de deux équations différentielles couplées portant sur v_1 et v_2 .
 - 2) On pose $\sigma = v_1 + v_2$ et $\delta = v_1 - v_2$. Obtenir les équations différentielles vérifiées par σ et δ . On introduira deux pulsations propres, notée ω_σ et ω_δ .
 - 3) En déduire les expressions de $\sigma(t)$ et $\delta(t)$, puis celles de $v_1(t)$ et $v_2(t)$.
- Dans la suite, on considère que le couplage magnétique est faible : $M \ll L$.
- 4) Faire un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{M}{L}$ des pulsations ω_σ et ω_δ .
 - 5) Identifier, dans les expressions de $v_1(t)$ et $v_2(t)$, un terme d'enveloppe. Tracer alors l'allure de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ dans le cas où $L = 50 M$.

POUR S'ENTRAÎNER AU DS

Ex. n°9 • Détecteur de métaux

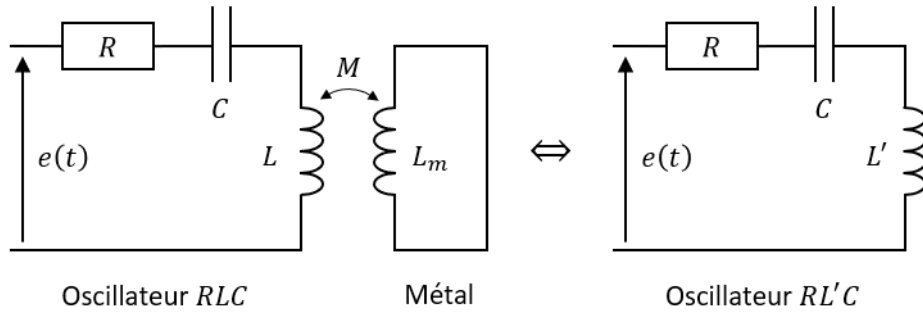
★★☆ 7838

Un détecteur de métaux utilise deux oscillateurs (des circuits RLC) dont les fréquences d'oscillations sont identiques en l'absence d'objets à détecter.

- 1) Déterminer l'expression de la fréquence propre f_r du circuit RLC série.

L'un des oscillateurs est tenu loin des objets à détecter et sert de référence. L'autre oscillateur fonctionne comme détecteur de champ magnétique. Lorsqu'un métal est présent dans le champ de la bobine de détection, d'inductance propre L , on admet que le métal

détecté se comporte comme une bobine d'inductance propre L_m pure. Le couplage entre les deux inductances est matérialisé par par une inductance mutuelle notée M .



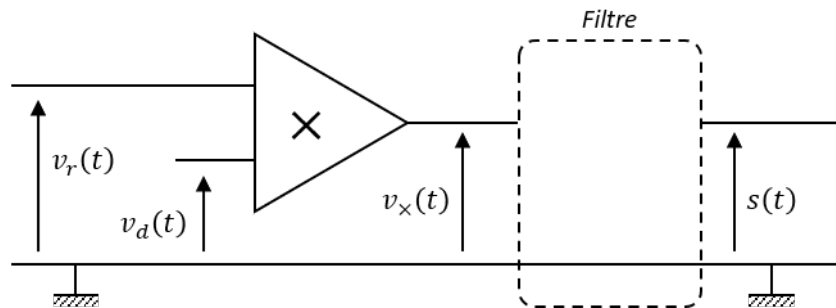
2) Écrire la loi des mailles dans chaque circuit. En déduire alors que l'ensemble {oscillateur RLC + métal d'inductance L' } est équivalent à un {oscillateur $RL'C$ }, où L' est à exprimer en fonction de L , L_m et M .

3) Déterminer la nouvelle fréquence f_d d'oscillation du détecteur lors de la détection d'un métal. Sachant que $M^2 \ll L \times L_m$, déterminer au premier ordre l'expression de $\Delta f = |f_r - f_d|$ en fonction de f_r , L , L_m et M .

On note respectivement $v_r(t) = v_{r0} \cos(2\pi f_r t)$ et $v_d(t) = v_{d0} \cos(2\pi f_d t)$ les tensions de chacun des oscillateurs respectivement de référence et de détection. Afin de déterminer la variation de fréquence, on utilise le montage de ci-après (cf. au dos de la feuille) comprenant un multiplieur réalisant l'opération $v_x(t) = v_r(t) \times v_d(t)$ et un filtre.

4) Représenter le spectre du signal $v_x(t)$.

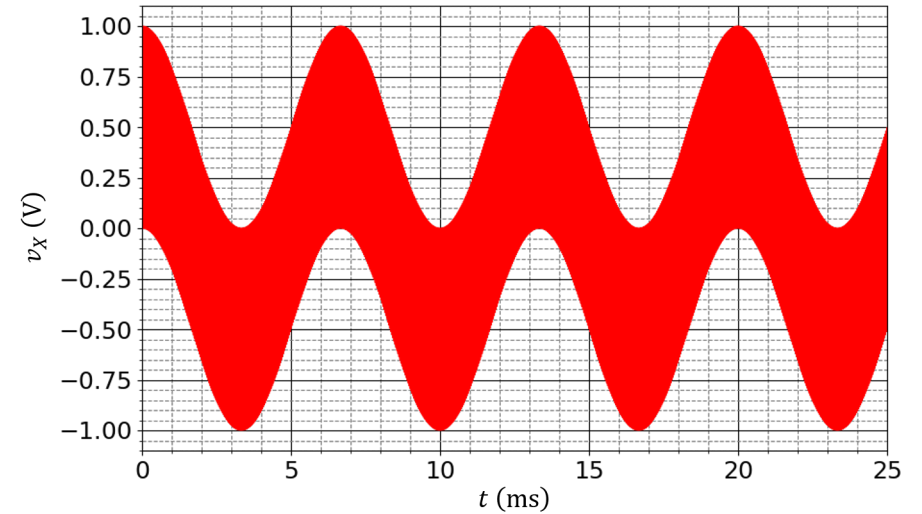
5) Sachant que l'on souhaite obtenir en sortie du filtre un signal permettant de déterminer Δf , proposer un filtre simple permettant d'isoler la composante pertinente du signal. Préciser comment choisir sa fréquence de coupure.



On note respectivement $v_r(t) = v_{r0} \cos(2\pi f_r t)$ et $v_d(t) = v_{d0} \cos(2\pi f_d t)$ les tensions de

chacun des oscillateurs respectivement de référence et de détection. Afin de déterminer la variation de fréquence, on utilise le montage de ci-après (cf. au dos de la feuille) comprenant un multiplieur réalisant l'opération $v_x(t) = v_r(t) \times v_d(t)$ et un filtre.

6) Lors d'une tentative de détection, le signal $v_x(t)$ ci-dessous a été enregistré en sortie du multiplieur. En déduire l'écart entre les deux fréquences des oscillateurs et prévoir ce qui sera détecté en sortie du fil.



ÉLÉMENTS DE CORRECTION

- ① 1) $\phi = B_0 S \cos(\alpha) e^{-t/\tau}$ 2) $e = \frac{B_0 S}{\tau} \cos(\alpha) e^{-t/\tau}$ 3) $i(t) = \frac{B_0 S}{R\tau} \cos(\alpha) e^{-t/\tau} > 0$
- ② 1) $\phi_{2 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 N_2^2 S_2 i_2}{d_2}$ 2) $L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S_2}{d_2}$ 3) $\phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 i_2}{d_2}$ 4) $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{d_2}$ 5) $M = \sqrt{L_1 L_2}$ 6) $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{d_2}$ ④ 1) $\phi_{f \rightarrow s} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{a}\right)$ 2) $M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{a}\right)$ ⑤
- 1) $u = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ et $0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$ 2) $\underline{I}_1 = \frac{U_m}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}}$
- et $\underline{I}_2 = -\frac{j\omega M \underline{I}_1}{R_2 + j\omega L_2}$ ⑥ $\phi_1 = \frac{N \mu_0 a I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$; $\phi_{tot} = N \phi_1$ et $L = \frac{\phi_{tot}}{I_0}$ ⑦ 1)
- $L_b = \frac{N^2 \mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$ et $M = \frac{N \mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$ 2) $i_0(t) \simeq -\frac{I_1}{N} \cos(\omega t)$ ⑧ 1)

$$\begin{aligned}
&0 = v_1 + LC \frac{d^2 v_1}{dt^2} + MC \frac{d^2 v_2}{dt^2} \text{ et } 0 = v_2 + LC \frac{d^2 v_2}{dt^2} + MC \frac{d^2 v_1}{dt^2} \quad \mathbf{2) } \ddot{\sigma} + \omega_\sigma^2 \sigma = 0 \text{ et } \ddot{\delta} + \omega_\delta^2 \delta = 0 \\
\mathbf{3) } v_1(t) &= E \cos\left(\frac{\omega_\sigma + \omega_\delta}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_\sigma - \omega_\delta}{2} t\right) \text{ et } v_2(t) = -E \sin\left(\frac{\omega_\sigma + \omega_\delta}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_\sigma - \omega_\delta}{2} t\right) \\
\mathbf{4) } \omega_\sigma &= \omega_0 \left(1 - \frac{M}{2L}\right) \text{ et } \omega_\delta = \omega_0 \left(1 + \frac{M}{2L}\right) \quad \mathbf{5) } \text{ Cf. correction } \mathbf{9} \quad \mathbf{1) } f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \mathbf{2) } \\
L' &= L \left(1 - \frac{M^2}{LL_m}\right) \quad \mathbf{3) } \Delta f = f_r \cdot \frac{M^2}{2LL_m} \quad \mathbf{4) } \text{ Cf. correction } \mathbf{5) } \text{ Passe-bas } \mathbf{6) } \Delta f = \frac{1}{T} = 150 \text{ Hz}
\end{aligned}$$